BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2015

УДК 517.9

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

М.А.САДЫГОВ
Бакинский Государственный Университет
misreddin08@rambler.ru

В работе получены необходимые и достаточные условия слабого минимума функции в Банаховом пространстве при наличии ограничений с использованием классов $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ *Липшицевых в точке отображений.*

Ключевые слова: достаточное условие, липшицевая функция, слабый локальный минимум, банахово пространство.

В [1,2] определены $S-(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ липшицевые отображения в точке относительно множества в банаховом пространстве, изучен ряд их свойств и рассмотрены экстремальные задачи с ограничениями. В [2,3] получено достаточное условие высокого порядка слабого минимума функции в банаховом пространстве при наличии ограничений.

$S_\tau-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ **слабо липшицевое отображение**

Пусть X банахово пространство и $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ есть семейство конечномерных подпространств пространства X направленное по возрастанию и удовлетворяющее условию $\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha = X$, где $E_\alpha \neq E_\beta$ при $\alpha \neq \beta$, A - множество индексов, направленное (рефлексивным, транзитивным, антисимметричным) отношением $\leq$. Отметим, что A направлено по возрастанию $\alpha \leq \beta$, если $E_\alpha \subset E_\beta$. Так как всякая линейная система обладает алгебраическим базисом, то существование данного семейства конечномерных подпространств E_α, $\alpha \in A$, в X следует из леммы Цорна. Ясно, что E_α, $\alpha \in A$, банахово пространство относительно индуцированной топологии из банахова пространства X.

Пусть g_α обозначает каноническое вложение E_α в X. Известно, что индуктивная топология в X относительно семейства $(E_\alpha, g_\alpha, \alpha \in A)$ является локальным выпуклым пространством(см.[4]). Через $(X)_s$ будем обозначать пространство X, снабженное введенной топологией.

Положим

$$T_s(x_0;C) = \left\{x \in X : \exists x_k \to x \text{ в } (X)_s,\ \exists t_k \downarrow 0, \text{что } x_0 + t_k x_k \in C\right\}.$$

Если x_0 является локальным минимумом функции f на множестве $C \bigcap (x_0 + E_\tau)$ при $\tau \in A$, то x_0 назовем слабым локальным минимумом функции f на множестве C.

Пусть X-банахово пространство, Y-нормированное пространство, $G \subset X$, $C \subset X$, $F: X \to Y$, $S_\tau : X \to Y$, $f : X \to R$, $\varphi_\tau : X \to R$, $\alpha > 0$, $\nu > 0$, $\beta \ge \alpha\nu$, $\delta > 0$ и $\omega : R_+ \to R_+$, где $\omega(0) = 0$, $R_+ = [0,+\infty)$.

Отображение F назовем $S_\tau - (\alpha,\beta,\nu,\omega)$ слабо липшицевым с постоянной $L_\tau > 0$ в точке $\overline{x} \in G$ относительно множества G, если F удовлетворяет условию

$$\|F(y) - F(x) - S_\tau(y) + S_\tau(x)\| \le L_\tau \|x - y\|^{\nu} (\|x - \overline{x}\|^{\beta - \alpha\nu} + \|x - y\|^{\frac{\beta - \alpha\nu}{\alpha}}) + \omega(\|x - \overline{x}\|)$$

при $x, y \in G_\tau = G \bigcap (\overline{x} + E_\tau)$ и $\tau \in A$.

Если $G = B(\overline{x}, \delta)$ и отображение F является $S_\tau - (\alpha,\beta,\nu,\omega)$ слабым липшицевым с постоянной L_τ в точке $\overline{x} \in G$ относительно множества G, то отображение F назовем $S_\tau - (\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ слабо липшицевым с постоянной L_τ в точке $\overline{x}$, а если $F(x) = f(x)$ и $S_\tau(x) = \varphi_\tau(x)$, то функцию f назовем $\varphi_\tau - (\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ слабо липшицевой с постоянной L_τ в точке $\overline{x}$. Если $\omega(t) \equiv 0$, то отображение F назовем $S_\tau - (\alpha,\beta,\nu,\delta)$ слабо липшицевым, а функцию f назовем $\varphi_\tau - (\alpha,\beta,\nu,\delta)$ слабо липшицевой с постоянной L_τ в точке $\overline{x}$. Если $\omega(t) \equiv 0$, $S_\tau(x) = 0$ и $\varphi_\tau(x) \equiv 0$, то F и f назовем $(\alpha,\beta,\nu,\delta)$ слабо липшицевые с постоянной L_τ в точке $\overline{x}$.

Отметим, что по определению $E_{\tau_1} \subset E_{\tau_2}$ при $\tau_1, \tau_2 \in A$, $\tau_1 < \tau_2$. Поэтому в определение $S_\tau - (\alpha,\beta,\nu,\omega)$ слабо липшицевым отображением положить $S_\tau \equiv S$ при $\tau \in A$ более целесообразно.

Если $S_\tau = S$ и $L_\tau = L$ при $\tau \in A$, то отображение F называется $S - (\alpha,\beta,\nu,\omega)$ липшицевым с постоянной L в точке $\overline{x} \in G$ относительно множества G.

О необходимых и достаточных условиях слабого минимума в банаховом пространстве при наличии ограничений

Пусть X банахово пространство, $G, C \subset X$, $\alpha > 0$, $\nu > 0$, $\beta \ge \alpha\nu$, $\delta > 0$ и $\omega : R_+ \to R_+$, где $\omega(0) = 0$, $B(x,\delta) = \{y \in X : \|y - x\| \le \delta\}$. Если $x_0 \in C$, то положим $C_\tau = C \bigcap (x_0 + E_\tau)$ и $d_{C_\tau}(x) = \inf\{\|y - x\| : y \in C_\tau\}$ при $\tau \in A$.

Теорема 1. Пусть x_0 является слабым минимумом функции f на множестве C, f в точке x_0 удовлетворяет $(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ слабо липшицеву условию относительно множества G с постоянной L_τ и $C \subset G$. Тогда для любого $\lambda \ge L_\tau$ функция

$$H_{\lambda,\tau}(x) = f(x) + \lambda(d_{C_\tau}^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_{C_\tau}^{\nu}(x)) + \omega(\|x - x_0\|)$$

достигает минимума на $G_\tau = G \bigcap (x_0 + E_\tau)$ в точке x_0 и если $\lambda > L_\tau$ и C_τ замкнуто, то любая точка минимизирующая $H_{\lambda,\tau}(x)$ на множестве G_τ принадлежит в C_τ.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существуют точка $y \in G_\tau$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $H_{\lambda,\tau}(y) < f(x_0) - \lambda\varepsilon$, где $\lambda \ge L_\tau$. Возьмем точку $c \in C_\tau$ такую, что $\|c - y\|^{\frac{\beta}{\alpha}} + \|y - x_0\|^{\beta-\alpha\nu}\|c - y\|^{\nu} \le d_{C_\tau}^{\frac{\beta}{\alpha}}(y) + \|y - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_{C_\tau}^{\nu}(y) + \varepsilon$. Так как f в точке x_0 удовлетворяет $(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ слабо липшицеву условию относительно множества G_τ с постоянной L_τ, то

$$f(c) \le f(y) + L_\tau(\|c - y\|^{\frac{\beta}{\alpha}} + \|c - y\|^{\nu} \cdot \|y - x_0\|^{\beta-\alpha\nu}) + \omega(\|y - x_0\|) \le$$

$$\le f(y) + \lambda(\|c - y\|^{\frac{\beta}{\alpha}} + \|c - y\|^{\nu} \cdot \|y - x_0\|^{\beta-\alpha\nu}) + \omega(\|y - x_0\|) \le$$

$$\le f(y) + \lambda(d_{C_\tau}^{\frac{\beta}{\alpha}}(y) + \|y - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_{C_\tau}^{\nu}(y)) + \omega(\|y - x_0\|) + \lambda\varepsilon < f(x_0).$$

Это противоречит предположению, что f достигает минимума в точке x_0 на множестве C_τ.

Если $\lambda > L_\tau$ и $y \in G_\tau$ также минимизирует функции $H_{\lambda,\tau}(x)$ на множестве G_τ, то из первой части теоремы получим

$$f(y) + \lambda(d_{C_\tau}^{\frac{\beta}{\alpha}}(y) + \|y - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_{C_\tau}^{\nu}(y)) + \omega(\|y - x_0\|) = f(x_0) \le f(y) +$$

$$+ \frac{\lambda + L_\tau}{2}(d_{C_\tau}^{\frac{\beta}{\alpha}}(y) + \|y - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_{C_\tau}^{\nu}(y)) + \omega(\|y - x_0\|).$$

Отсюда получим, что $d_{C_\tau}^{\frac{\beta}{\alpha}}(y) + \|y - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_{C_\tau}^{\nu}(y) = 0$. Поэтому $d_{C_\tau}(y) = 0$. Так как C_τ замкнуто, то $y \in C_\tau$. Теорема доказана.

Замечание 1. Ясно, что $d_{C_\tau}(x) \le \|x - x_0\|$. Поэтому если в теореме 1 $\alpha = 1$, то из теоремы 1 вытекает, что для любого $\lambda \ge L_\tau$ функция

$$H_{\lambda,\tau}(x) = f(x) + 2\lambda \|x - x_0\|^{\beta-\nu} d^{\nu}_{C_\tau}(x) + \omega(\|x - x_0\|)$$

достигает минимума на G_τ в точке x_0 и если $\lambda > L_\tau$ и C_τ замкнуто, то любая точка минимизирующая $H_{\lambda,\tau}(x)$ на множестве G_τ принадлежит в C_τ.

Следствие 1. Пусть x_0 является слабым минимумом функции f на множестве C, f в точке x_0 удовлетворяет $(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ слабо липшицеву условию с постоянной L_τ и $C \subset B(x_0,\delta)$. Тогда для любого $\lambda \ge L_\tau$ функция

$$H_{\lambda,\tau}(x) = f(x) + \lambda(d^{\frac{\beta}{\alpha}}_{C_\tau}(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d^{\nu}_{C_\tau}(x)) + \omega(\|x - x_0\|)$$

достигает минимума на $B(x_0,\delta) \bigcap (x_0 + E_\tau)$ в точке x_0 и если $\lambda > L_\tau$ и C_τ замкнуто, то любая точка, минимизирующая $H_{\lambda,\tau}(x)$ на множестве $B(x_0,\delta) \bigcap (x_0 + E_\tau)$, принадлежит C_τ.

Следствие 2. Пусть x_0 является слабым минимумом функции f на множестве C, f в точке x_0 удовлетворяет φ_τ-$(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ слабо липшицеву условию относительно множества G с постоянной L_τ, $C \subset G$ и $D_\tau = \{x \in C_\tau : \varphi_\tau(x) \le \varphi_\tau(x_0)\}$. Тогда для любого $\lambda \ge L_\tau$ функция

$$H_{\lambda,\tau}(x) = f(x) - \varphi_\tau(x) + \lambda(d^{\frac{\beta}{\alpha}}_{D_\tau}(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d^{\nu}_{D_\tau}(x)) + \omega(\|x - x_0\|)$$

достигает минимума на $G_\tau = G \bigcap (x_0 + E_\tau)$ в точке x_0 и если $\lambda > L_\tau$ и D_τ замкнуто, то любая точка минимизирующая $H_{\lambda,\tau}(x)$ на множестве G_τ принадлежит в D_τ.

Доказательство. Ясно, что x_0 является слабым минимумом функции $f - \varphi_\tau$ на множестве $D_\tau = \{x \in C_\tau : \varphi_\tau(x) \le \varphi_\tau(x_0)\}$. Отметим, что функция $f(x) - \varphi_\tau(x)$ удовлетворяет $(\alpha,\beta,\nu,\omega)$ липшицеву условию относительно множества G_τ с постоянной L_τ. Применяя теорему 1 получим, что для любого $\lambda \ge L_\tau$ функция

$$H_{\lambda,\tau}(x) = f(x) - \varphi_\tau(x) + \lambda\left(d^{\frac{\beta}{\alpha}}_{D_\tau}(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d^{\nu}_{D_\tau}(x)\right) + \omega(\|x - x_0\|)$$

достигает минимума на G_τ в точке x_0.

Из теоремы 1 также вытекает, что если $\lambda > L_\tau$ и D_τ замкнуто, то любая точка, минимизирующая $H_{\lambda,\tau}(x)$ на множестве G_τ, принадлежит D_τ. Следствие доказано.

Теорема 2. Пусть x_0 является слабым минимумом функции f_0 на множестве $\{x \in C : f_i(x) \le 0, i = 1,\dots,n\}$, где $f_i : X \to R$, функции f_i, $i = 0,1,\dots,n$, в точке $x_0 \in C$, удовлетворяют $\varphi_{i,\tau} - (\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ слабо липшицеву условию с постоянной L_τ, $C \subset B(x_0,\delta)$, $D_\tau = \{x \in C_\tau : \varphi_{i,\tau}(x) \le \quad \le \varphi_{i,\tau}(x_0), i = 0,1,\dots,n\}$. Тогда для любого $\lambda \ge L_\tau$ функция

$$H_{\lambda,\tau}(x) = \max\{r_0(f_0(x) - \varphi_{0,\tau}(x) - f_0(x_0) + \varphi_{0,\tau}(x_0)) + \sum_{i=1}^{n} r_i(f_i(x) - \varphi_{i,\tau}(x) +$$

$$+\varphi_{i,\tau}(x_0)) : r_i \ge 0, i = 0,1,\dots,n, \sum_{i=0}^{n} r_i = 1, r_i \in R\} +$$

$$+\lambda(d_{D_\tau}^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu} d_{D_\tau}^{\nu}(x)) + \omega(\|x - x_0\|)$$

достигает минимума на $B(x_0,\delta) \bigcap (x_0 + E_\tau)$ в точке x_0 и если $\lambda > L_\tau$ и D_τ замкнуто, то любая точка минимизирующая $H_{\lambda,\tau}(x)$ на множестве $B(x_0,\delta) \bigcap (x_0 + E_\tau)$ принадлежит D_τ.

Если $\omega(x) = o(\|x\|^\beta)$ и f удовлетворяет $\varphi - (\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ слабо липшицеву условию с постоянной L в точке x_0, то функцию f назовем $\varphi - (\alpha,\beta,\nu,\delta,o(\beta))$ слабо липшицевой с постоянной L в точке x_0, где $o(0) = 0$, $\lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$.

Положим

$$f_\varphi^{\{\beta\}+}(x_0;x) = \overline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{f(x_0+tx) - \varphi(x_0+tx) - f(x_0) + \varphi(x_0)}{t^\beta},$$

$$f_\varphi^{\{\beta\}-}(x_0;x) = \underline{\lim}_{t\downarrow 0} \frac{f(x_0+tx) - \varphi(x_0+tx) - f(x_0) + \varphi(x_0)}{t^\beta},$$

$$d_D^{\{\beta\}-}(x_0;x) = \underline{\lim}_{t\downarrow 0} \frac{d_D^\beta(x_0+tx) - d_D^\beta(x_0)}{t^\beta}.$$

Теорема 3. Пусть x_0 является слабым минимумом функции f_0 на множестве $\{x \in C : f_i(x) \le 0, i = 1,\dots,n\}$, где $f_i : X \to R$, $i = 0,1,\dots,n$, функции f_i, $i = 0,1,\dots,n$, в точке x_0 удовлетворяют $\varphi_{i,\tau} - (1,\beta,\nu,\delta,o(\beta))$ слабо липшицеву условию с постоянной L_τ, где $C \subset B(x_0,\delta)$, $\lambda_\tau \ge L_\tau$ и $D_\tau = \{x \in C_\tau : \varphi_{i,\tau}(x) \le \varphi_{i,\tau}(x_0), i = 0,1,\dots n\}$. Тогда

$$\max_{i\in I(x_0)} f_{i\,\varphi_{i,\tau}}^{\{\beta\}+}(x_0;x) + \lambda_\tau d_{D_\tau}^{\{\beta\}-}(x_0;x) + \lambda_\tau \|x\|^{\beta-\nu} d_{D_\tau}^{\{\nu\}-}(x_0;x) \ge 0$$

при $x \in E_\tau$, где $I(x_0) = \{i \in \{1,\dots,n\} : f_i(x_0) = 0\} \bigcup \{0\}$.

Пусть X-банахово пространство, Y-нормированное пространство, $f_i : X \to R$, $i = 0,1,\dots,n$, и $F : X \to Y$ произвольное отображение.

Рассмотрим минимизации функции $f_0(x)$ на множестве $\{x\in C: f_j(x)\le 0,\ j=1,2,\dots,n,\ F(x)=0\}$.

Обозначим $M_\tau=\{x\in D_\tau: F(x)=F(x_0)\}$, где $D_\tau\subset C\bigcap(x_0+E_\tau)$. Пусть $S_\tau: X\to Y$. Отображение F будем называть $S_\tau-(\alpha,\beta,\nu,\delta)$-регулярным ($(\alpha,\beta,\nu,\delta)$-регулярным) в точке $x_0\in E$ относительно семейства $(D_\tau)_{\tau\in A}$, если существует такое число $r_{D_\tau}>0$, что

$$d_{M_\tau}^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}d_{M_\tau}^{\nu}(x)\le r_{D_\tau}(\|F(x)-F(x_0)-S_\tau(x)+S_\tau(x_0)\|^{\frac{\beta}{\alpha}}+$$
$$+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}\|F(x)-F(x_0)-S_\tau(x)+S_\tau(x_0)\|^{\nu})$$

$$(d_{M_\tau}^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}d_{M_\tau}^{\nu}(x)\le r_{D_\tau}(\|F(x)-F(x_0)\|^{\frac{\beta}{\alpha}}+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}\|F(x)-F(x_0)\|^{\nu}))$$

при $x\in D_\tau$, $\|x-x_0\|\le\delta$, $\tau\in A$.

Пусть $S_\tau: X\to Y$, $\varphi_{i,\tau}: X\to R$. Далее положим

$$D_\tau=\{x\in C_\tau: \varphi_{i,\tau}(x)\le\varphi_{i,\tau}(x_0),\ i=0,1,\dots,n,\ S_\tau(x)-S_\tau(x_0)=0\},$$
$$\overline{D}_\tau=\{x\in C_\tau: \varphi_{i,\tau}(x)\le\varphi_{i,\tau}(x_0),\ i=0,1,\dots,n\},$$

$$Q_\tau(x)=\|F(x)-F(x_0)-S_\tau(x)+S_\tau(x_0)\|^{\frac{\beta}{\alpha}}+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}\|F(x)-F(x_0)-S_\tau(x)+S_\tau(x_0)\|^{\nu},$$
$$H_\tau(x)=\max\{f_0(x)-f_0(x_0)-\varphi_{0,\tau}(x)+\varphi_{0,\tau}(x_0), f_1(x)-\varphi_{1,\tau}(x)+\varphi_{1,\tau}(x_0),\dots, f_n(x)-$$
$$-\varphi_{n,\tau}(x)+\varphi_{n,\tau}(x_0)\}.$$

Теорема 4. Пусть X - банахово пространство, Y -нормированное пространство, x_0 является слабым минимумом функции f_0 на множестве $\{x\in C: f_i(x)\le 0,\ i=1,\dots,n,\ F(x)=0\}$, где $f_i: X\to R$, $i=0,1,\dots,n$, $F: X\to Y$, функции f_i, $i=0,1,\dots,n$, в точке x_0 удовлетворяют $\varphi_{i,\tau}-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ слабо липшицеву условию с постоянной L_τ, отображение F $(\alpha,\beta,\nu,\delta)$- регулярно относительно семейства $(\overline{D}_\tau)_{\tau\in A}$ (или отображение F $S_\tau-(\alpha,\beta,\nu,\delta)$-регулярно относительно семейства $(D_\tau)_{\tau\in A}$) в точке x_0, функции $Q_\tau(x)$ и $\omega(\|x-x_0\|)$ в точке x_0 удовлетворяют $(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ слабо липшицеву условию с постоянной L_τ и $C\subset B(x_0,\delta)$. Тогда для любого $\lambda\ge 2L_\tau+L_\tau r_\tau+L_\tau^2 r_\tau$ функция

$$H_{\lambda,\tau}(x)=H_\tau(x)+\lambda_\tau Q_\tau(x)+2\omega(\|x-x_0\|)+\lambda_\tau(d_{D_\tau}^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+\|x-x_0\|^{\beta-\alpha\nu}d_{D_\tau}^{\nu}(x))$$

достигает минимума на $B(x_0,\delta)\bigcap(x_0+E_\tau)$ в точке x_0 и если D_τ замкнуто и $\lambda>2L_\tau+L_\tau r_\tau+L_\tau^2 r_\tau$, то любая точка, минимизирующая $H_{\lambda,\tau}(x)$ на множестве $B(x_0,\delta)\bigcap(x_0+E_\tau)$ принадлежит D_τ, где r_τ -коэффициент регулярности.

Теорема 5. Пусть X-банахово пространство, Y-нормированное пространство, x_0 является слабым минимумом функции f_0 на множестве $\{x \in C : f_i(x) \le 0, i = 1,\dots,n, F(x) = 0\}$, где $f_i : X \to R$, $i = 0,1,\dots,n$, $F : X \to Y$, функции f_i, $i = 0,1,\dots,n$, в точке x_0 удовлетворяют $\varphi_{i,\tau} - (1,\beta,\nu,\delta)$ слабо липшицеву условию с постоянной L_τ, отображение F $(1,\beta,\nu,\delta)$- регулярно относительно семейства $(\overline{D}_\tau)_{\tau\in A}$ (или отображение F $S_\tau - (1,\beta,\nu,\delta)$-регулярно относительно семейства $(D_\tau)_{\tau\in A}$) в точке x_0, $Q_\tau(x)$ в точке x_0 удовлетворяет $(1,\beta,\nu,\delta)$ слабо липшицеву условию с постоянной L_τ и $C \subset B(x_0, \delta)$. Тогда для любого $\lambda \ge L_\tau + L_\tau r_\tau + L_\tau^2 r_\tau$

$$\max_{i\in I(x_0)} f_{i\varphi_{i,\tau}}^{\{\beta\}+}(x_0;x) + \lambda Q_\tau^{\{\beta\}+}(x_0;x) + \lambda d_{D_\tau}^{\{\beta\}-}(x_0;x) + \lambda\|x\|^{\beta-\nu} d_{D_\tau}^{\{\nu\}-}(x_0;x) \ge 0$$

при $x \in E_\tau$, где $I(x_0) = \{i \in \{1,\dots,n\} : f_i(x_0) = 0\} \cup \{0\}$, r_τ-коэффициент регулярности.

Пусть $S_\tau : X \to Y$. Положим

$$V_\tau = \{x \in C_\tau : S_\tau(x) - S_\tau(x_0) = 0\},\quad f(x) = \max\{f_0(x) - f_0(x_0), f_1(x),\dots,f_n(x)\},$$

$$Q_\tau(x) = \|F(x) - F(x_0) - S_\tau(x) + S_\tau(x_0)\|^{\frac{\beta}{\alpha}} + \|x - x_0\|^{\beta-\alpha\nu}\|F(x) - F(x_0) - S_\tau(x) + S_\tau(x_0)\|^{\nu}.$$

Теорема 6. Пусть X и Y банаховы пространства, $x_0 \in C$ является слабым минимумом функции f_0 на множестве $\{x \in C : f_i(x) \le 0, i = 1,\dots,n, F(x) = 0\}$, где $f_i : X \to R$, $i = 0,1,\dots,n$, $F : X \to Y$, функции f_i, $i = 0,1,\dots,n$, в точке x_0 удовлетворяют $(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ слабо липшицеву условию с постоянной К, C непустое открытое множество, непрерывное отображение $F : C \to Y$ накрывает с константной $a_\tau > 0$ на множестве C_τ и $C \subset B(x_0, \delta)$, функции $Q_\tau(x)$ и $\omega(d(x,x_0))$ удовлетворяют $(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ слабо липшицеву условию с постоянной К. Тогда существуют числа $m_\tau > 0$ и $\nu_\tau > 0$ такие, что для любого $\mu \ge m_\tau$ функция

$$S_{\mu,\tau}(x) = f(x) + \mu Q_\tau(x) + 2\omega(d(x,x_0)) + \mu(d_{G_\tau}^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + d^{\beta-\alpha\nu}(x,x_0) d_{G_\tau}^{\nu}(x))$$

достигает минимума на $B(x_0,\delta) \cap (x_0 + E_\tau)$ в точке x_0, где $G_\tau = B(x_0,\nu_\tau) \cap V_\tau$, $0 < \nu_\tau < \delta$, и если V_τ замкнуто и $\mu > m_\tau$, то любая точка, минимизирующая $S_{\mu,\tau}(x)$ на множестве $B(x_0,\delta) \cap (x_0 + E_\tau)$ принадлежит G_τ.

Пусть $C \subset X$, $x_0 \in C$, $f : X \to R$. Положим $C_\tau = C \cap (x_0 + E_\tau)$ при $\tau \in A$. Далее считаем, что $o_i : R_+ \to R_+$, где $o_i(0) = 0$ и $\lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{o_i(t)}{t} = 0$.

Теорема 7. Пусть $x_0 \in C$, функция f удовлетворяет $\varphi_i - (1,\beta_i,\nu_i,\delta,o_i(\beta_i))$ липшицеву условию с постоянной L_i в точке x_0, существуют числа $\alpha_\tau > 0$

такие, что $\psi_i(x) = \varphi_i(x_0 + x) - \varphi_i(x_0) \geq 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, при $x \in (C_\tau - x_0) \bigcap \alpha_\tau B$, $\tau \in A$ и $\bigcup_{i=1}^{n} \{x \in T_s(x_0;C) : f_{\varphi_i}^{\{\beta_i\}-}(x_0;x) > 0\} = T_s(x_0;C) \setminus \{0\}$. Тогда $x_0 \in C$ является точкой строгого слабого локального минимума функции f на множестве C.

ЛИТЕРАТУРА

1. Садыгов М.А. Задачи на экстремум с ограничениями в метрическом пространстве. ДАН, 2013, т.452, №5, с. 490-493.
2. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация. LAMBERT Academic Publishing, Germany, 2014, 359 p.
3. Садыгов М.А. Достаточные условия для локального минимума. Procedings of the Institute of Applied Mathematics. 2014, v.3, №2, c. 212-233.
4. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971, 359 с.

OPTİMALLIQ ÜÇÜN YÜKSƏK TƏRTİBLİ ZƏRURİ VƏ KAFİ ŞƏRTLƏR

M.A.SADIQOV

XÜLASƏ

İşdə nöqtədə $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ zəif Lipşits funksiyalar sinfindən istifadə olunaraq Banax fəzasında məhdudiyyətli ekstremal məsələnin zəif munimumu üçün yüksək tərtibli zəruri və kafi şərt alınmışdır.

Açar sözlər: kafi şərt, Lipşis funksiya, zəif lokal minimum, Banax fəzası.

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR OPTIMIZATION

M.A.SADYGOV

SUMMARY

In the work, using the classes of the $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$-weak Lipschitz functions in the point, high order necessary and sufficient conditions of the weak extremum in the Banach space are derived by the constraints.

Key words: sufficient conditions, Lipschitz functions, weak local minimum, Banach space.

Поступила в редакцию: 29.04.2015 г.
Подписано к печати: 17.11.2015 г.